第 10 講　無限級数

10

［A］ $-1<x<1$ とする．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^k$$

［B］ 正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があり，曲線 $y=px^p$ $(p>1)$ 上の点 $(a_k,\ pa_k{}^p)$ における接線 l_k と x 軸との交点の x 座標が a_{k+1} となっている．また，$a_1=1$ である．

(1) a_{k+1} と a_k の間の関係式を導き，a_k を求めよ．

(2) 接線 l_k と直線 $x=a_k$ および x 軸で囲まれる三角形の面積を A_k とし，曲線 $y=px^p$ と接線 l_k および直線 $x=a_{k+1}$ で囲まれる図形の面積を B_k とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　無限級数

10　$f(x)=-\frac{1}{2}x+3$ とする．$x_1=1$ とおいて数列 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ をつくり，座標平面上に点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ f(x_n))$ をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{x_n\}$ の一般項 x_n を求めよ．

(2)　動点 P が点 P_1 を出発して，P_2，P_3，P_4，…，P_n，… と進むとき，動点 P はどのような点に近づくか，その座標を求めよ．

(3)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを l_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．$L=\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　無限級数

10

［A］　$-1<x<1$ とする．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^k$$

［B］　正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があり，曲線 $y=px^p$ $(p>1)$ 上の点 $(a_k,\ pa_k{}^p)$ における接線 l_k と x 軸との交点の x 座標が a_{k+1} となっている．また，$a_1=1$ である．

(1)　a_{k+1} と a_k の間の関係式を導き，a_k を求めよ．

(2)　接線 l_k と直線 $x=a_k$ および x 軸で囲まれる三角形の面積を A_k とし，曲線 $y=px^p$ と接線 l_k および直線 $x=a_{k+1}$ で囲まれる図形の面積を B_k とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k$ を求めよ．

【答】［A］　$\dfrac{x}{(1-x)^2}$

［B］(1) $a_k=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{k-1}$　$(k\geqq 1)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k=\frac{p}{p+1}-\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$

【解説】

［A］　$\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^k$ とおくと

$$\begin{aligned}xS&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^{k+1}\\&=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)(n+2-k)}{n}x^k\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&(1-x)S\\&=\frac{1\times n}{n}x^1+\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{k(n+1-k)}{n}-\frac{(k-1)(n+2-k)}{n}\right\}x^k-\frac{n\times 1}{n}x^{n+1}\\&=x+\sum_{k=2}^{n}\frac{-2k+n+2}{n}x^k-x^{n+1}\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle T=\sum_{k=2}^{n}\frac{-2k+n+2}{n}x^k$ とおくと

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$(1-x)T$$
$$=\frac{n-2}{n}x^2+\sum_{k=3}^{n}\left\{\frac{-2k+n+2}{n}-\frac{-2(k-1)+n+2}{n}\right\}x^k-\frac{-2n+n+2}{n}x^{n+1}$$
$$=\frac{n-2}{n}x^2+\sum_{k=3}^{n}\frac{-2}{n}x^k-\frac{-n+2}{n}x^{n+1}$$
$$=\left(1-\frac{2}{n}\right)(x^2+x^{n+1})-\frac{2}{n}\cdot\frac{x^3(1-x^{n-2})}{1-x}\quad(-1<x<1\text{ より})$$
$$\to x^2\ (n\to\infty)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}T=\frac{x^2}{1-x}$$

このとき

$$(1-x)S=x+T-x^{n+1}\to x+\frac{x^2}{1-x}\ (n\to\infty)$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S=\frac{1}{1-x}\left(x+\frac{x^2}{1-x}\right)=\boldsymbol{\frac{x}{(1-x)^2}}$$

［B］（1）$y'=p^2x^{p-1}$ より点 $(a_k,\ pa_k{}^p)$ における接線 l_k の方程式は

$$y=p^2a_k{}^{p-1}(x-a_k)+pa_k{}^p$$
$$\therefore\ y=p^2a_k{}^{p-1}x+p(1-p)a_k{}^p$$

となり，この直線が点 $(a_{k+1},\ 0)$ を通るので

$$0=p^2a_k{}^{p-1}a_{k+1}+p(1-p)a_k{}^p$$
$$\Longleftrightarrow\ p^2a_k{}^{p-1}a_{k+1}=p(p-1)a_k{}^p$$
$$\Longleftrightarrow\ a_{k+1}=\left(1-\frac{1}{p}\right)a_k\quad(a_k>0,\ p>1\text{ より})$$

ゆえに $\{a_n\}$ は初項 1，公比 $1-\frac{1}{p}$ の等比数列であるので

$$\boldsymbol{a_k=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}}$$

（2）$1-\frac{1}{p}=\alpha$ とおくと，

$$A_k=(a_k-a_{k+1})\cdot pa_k{}^p\cdot\frac{1}{2}$$
$$=(\alpha^{k-1}-\alpha^k)\cdot p(\alpha^{k-1})^p\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(1-\alpha)p\cdot(\alpha^{p+1})^{k-1}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p+1}\right\}^{k-1}$$

となり，$\{A_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p+1}$ の等比数列となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで $p>1$ より $0<\dfrac{1}{p}<1$

$$\therefore \quad 0<1-\frac{1}{p}<1$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p+1}}$$

$$=\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$$

また　$\lim_{k\to\infty}a_k=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k=\int_0^1 px^p\,dx-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k$$

$$=\left[\frac{p}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1-\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$$

$$=\frac{p}{p+1}-\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　無限級数

10　$f(x)=-\frac{1}{2}x+3$ とする．$x_1=1$ とおいて数列 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ をつくり，座標平面上に点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ f(x_n))$ をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{x_n\}$ の一般項 x_n を求めよ．

(2)　動点Pが点 P_1 を出発して，P_2，P_3，P_4，…，P_n，… と進むとき，動点Pはどのような点に近づくか，その座標を求めよ．

(3)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを l_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．$L=\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ を求めよ．

【答】　(1) $x_n=2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　(2) $(2,\ 2)$　(3) $L=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

【解説】

(1)　$x_n=-\frac{1}{2}x_{n-1}+3$ より

$$x_n-2=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-2)$$

とできるので，

$$x_n-2=(x_1-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x_n=2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(2)　P_n は常に直線 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 上なので，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$$

よりPは $(2,\ f(2))$，つまり **(2, 2)** に近づく．

(3)

$$l_n=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_{n+1}-x_n|$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるので，$0<\frac{1}{2}<1$ より

$$L=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。